

# Travaux dirigés- Série 3: Électricité II

November 20, 2014

**Abstract**

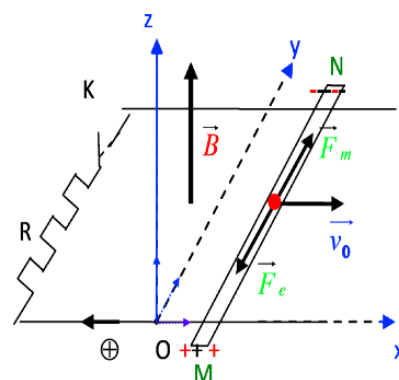
Electricité II  
Travaux Dirigés: Série 3

**Exercice I:** *Lois d'induction*

Un circuit est composé d'une résistance R, de deux rails conducteurs, d'un interrupteur K et d'un barreau conducteur de longueur l, de masse M et libre de se mouvoir sur les deux rails. Le circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  et perpendiculaire à son plan xOy. On communique au barreau une vitesse initiale  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ .

A- *Circuit ouvert*

- 1) Faire un schéma illustratif et expliquer le phénomène produit,
- 2) Déterminer le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  qui apparaît dans le barreau.
- 3.a) Calculer le champ électrique dans le barreau,
- 3.b) En déduire la ddp qui apparaît entre les bornes du barreau
- 4) Déterminer la force électromotrice  $e_{ind}$  induite:
  - a) La méthode de la circulation de  $\vec{E}_m$ ,
  - b) La variation du flux



B- *Circuit fermé*

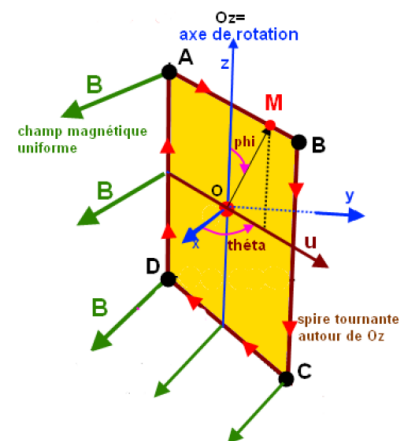
- 1) Déterminer la f.e.m  $e(t)$ ,
- 2) Déterminer le courant  $i_{ind}$  traversant le circuit,
- 3) Montrer que le sens de  $i_{ind}$  est conforme avec la loi de Lenz,
- 4.a) Déterminer la force de Laplace  $\vec{F}$  qui s'exerce sur le barreau,
- 4.b) Préciser l'action de  $\vec{F}$ ,
- 5.a) Déterminer  $\vec{v}(t)$  en fonction du temps de réponse du circuit  $\tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$ ,
- 5.b) En déduire le courant  $i_{ind}$  traversant le circuit, commenter
- 6) Déterminer le travail  $dW$  reçu par le barreau entre les instants  $t$  et  $t + dt$  par:
  - a) La méthode de circulation de la force de Laplace
  - b) Le théorème de Maxwell.

**Exercice II:** *spire tournante dans un champ B uniforme*

On considère une spire carrée  $S = [ABCD]$  dans le plan  $(\vec{u}, \vec{e}_z)$  d'un repère  $R_s = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z)$  mobile par rapport à un repère fixe  $R_0 = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  où règne un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ .

La spire tourne avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}_{R_s/R_0} = \omega\vec{e}_z$  autour de  $\vec{Oz}$  milieu des deux cotés opposés AB et CD.

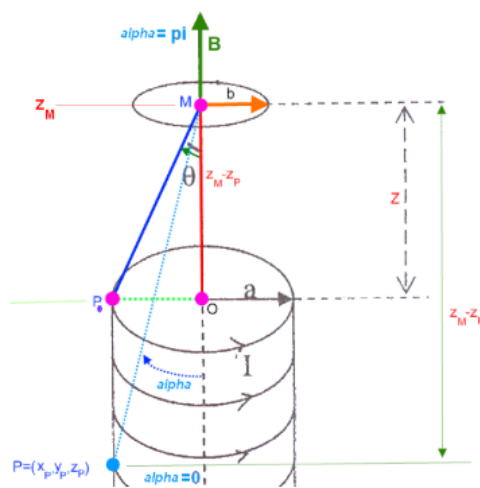
Sa position à l'instant t est donnée par l'angle  $(\vec{Ox}, \vec{e}_\rho) = \theta = \omega t$ .



- 1) Faire un schéma, et montrer que le flux de  $\vec{B}$  dépend du temps, commenter,
- 2.a) Paramétrer les points M du cadre en fonction de  $\theta$ ,
- 2.b) Donner les composantes de  $\vec{v}(M/R_0)$  en fonction des coordonnées  $(x, y, z)$  et  $\omega$ ,
- 3) Quelle grandeur est à l'origine du mouvement des charges libres,
- 4) Donner son expression en fonction de  $w$ ,  $B$  et les coordonnées de M,
- 5) En déduire la f.e.m instantanée induite dans la spire,
- 6) Retrouver l'expression de la f.e.m par la loi de Faraday.

**Exercice III:** *interaction bobine-solénoïde*

Un long solénoïde vertical  $\mathbb{S}$  d'axe  $\vec{Oz}$ , semi infini ( $z \leq 0$ ) à section circulaire, de rayon  $a$  et ayant  $n$  spires jointives par unité de longueur, est parcouru par un courant  $I$  permanent. Une bobine  $\mathbb{B}$  circulaire de même axe que le solénoïde, constituée de  $N$  spires de rayon  $b$  ( $b \ll a$ ), de résistance  $R$ , d'inductance négligeable et de masse  $m$ , se déplace au dessus du solénoïde le long de l'axe  $\vec{Oz}$  à une vitesse  $\vec{v} = -v\vec{e}_z$  où  $v$  est supposé constant et positif. La position du centre  $M(0, 0, z_M)$  de la base inférieure de  $\mathbb{B}$  est repérée par l'angle  $\theta$ ; c'est à dire  $\tan \theta = \frac{a}{z}$ .



- 1) Faire un schéma d'illustration,
  - 2) Donner  $\vec{B}$  créé par  $\mathbb{S}$  en un point de son axe,
  - 3) Déterminer le flux de  $\vec{B}$  à travers:
    - a) une spire de la bobine; et b) toute la bobine.
- On considère que  $\vec{B}$  constant au voisinage de l'axe  $\vec{Oz}$ .
- 4) Calculer l'inductance mutuelle entre les 2 circuits,
  - 5) En déduire que  $M$  peut se mettre sous la forme  $M_0(1 - \cos \theta)$ ,
  - 6.a) Déterminer la f.e.m induite en fonction de  $M_0, I, a, v$  et  $z$ .
  - 6.b) Déduire le courant induit dans la bobine,
  - 7) A l'aide du théorème de Maxwell, déterminer la résultante des forces magnétiques  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la bobine,
  - 8) Quelle est la puissance  $\mathcal{P}$ , dissipée par effet joules dans  $\mathbb{B}$ , en fonction de  $F$  et  $v$ .

**Exercice IV:** *énergie magnétique*

On considère un câble coaxial infini cylindrique de rayons  $a, b, c$ . Le courant d'intensité totale  $I$  passe dans un sens dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.

- 1) Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point  $M$ ,
- 2) Déterminer l'énergie magnétique  $W_m$  emmagasinée dans une unité de longueur d'une ligne coaxiale parcourue par un courant  $I$ .

# 1 Solution de la série 3

**Exercice I:** *circuit électrique dans  $\vec{B}$*

A) Circuit ouvert<sup>1</sup>

**1.a)** *Schéma d'illustration, voir fig 1* **1.b)** *Le phénomène produit,*

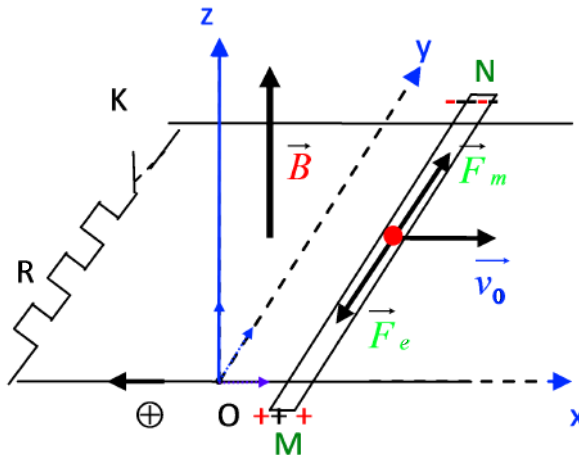


Figure 1: *circuit résistif dans un champ magnétique  $\vec{B}$  :  $y_N - y_M = L$*

Lorsqu'on communique au barreau  $[MN]$ , la vitesse

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$$

Les électrons de conduction (des électrons libres) sont entraînés suivant  $\vec{e}_x$  avec la même vitesse. En présence du champ  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , les électrons sont alors soumis à la force magnétique

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= -e \vec{v}_0 \wedge \vec{B} && \equiv -e \vec{E}_m \\ &= -ev_0 \vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z \\ &= +ev_0 B \vec{e}_y \end{aligned}$$

qui les entraîne vers la borne  $N$ .

Il en résulte alors:

- i) : une *accumulation* d'électrons sur la borne  $N$
- ii) : un *appauvrissement* d'électrons libres en  $M$

et par conséquent il y'a apparition d'une ddp

$$V_M - V_N \neq 0$$

d'où la naissance d'un champ électrostatique

$$\vec{E}_s = E_s \vec{e}_y$$

dirigé de M vers N (potentiel décroissant).

Ce champ  $E_s$  exerce à son tour une force électrique  $\vec{F}_e$  sur les électrons libres

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}_s = -eE_s\vec{e}_y$$

Le déplacement des électrons libres s'arrêtera lorsque la force électrique  $\vec{F}_e$  compense la force magnétique  $\vec{F}_m$ , soit

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = \vec{0}$$

**2)** Le champ électromoteur  $\vec{E}_m$  qui apparaît dans le barreau

Ce champ  $\vec{E}_m$  est induit par  $\vec{B}$ ; il est donné par

$$\vec{E}_m = \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = v_0 \vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z = -v_0 B\vec{e}_y$$

A l'équilibre on a :

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = -e(\vec{E}_m + \vec{E}_s) = \vec{0}$$

$$\vec{E}_s = -\vec{E}_m = v_0 B\vec{e}_y$$

**3.a)** Le champ électro-statique dans le barreau,

**3.b)** La ddp entre les bornes M et N du barreau

Le champ  $\vec{E}_s$  dérive d'un potentiel scalaire  $V$ ;

$$\begin{aligned} \text{a) : } \vec{E}_s &= -\overrightarrow{\text{grad}}V \\ \text{b) : } dV &= \overrightarrow{\text{grad}}V \times \overrightarrow{dl} = \frac{\partial V}{\partial y} dy \end{aligned}$$

$$dV = -E_s dy = -v_0 B dy \quad \Rightarrow \quad \int_N^M dV = V_M - V_N$$

$$\begin{aligned} V_M - V_N &= -v_0 B \int_N^M dy \\ &= -v_0 B (y_M - y_N) \\ &= v_0 B (y_N - y_M) \\ &= v_0 B (L - 0) \end{aligned}$$

$$V_M - V_N = +v_0 BL$$

**4)** La force électromotrice  $e_{ind}$  induite

**4.a)** Par la méthode de la circulation du champ électromoteur  $\vec{E}_m$

La f.e.m induite est

$$\begin{aligned}
 e_{ind} &= \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \\
 &= \left( \int_M^K + \int_K^N \right) \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_N^M \vec{E}_m \cdot d\vec{l}}_{\text{fem } (e_{ind})_{MN}} \\
 e_{ind} &= \int_N^M \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad , \quad \vec{E}_m = -v_0 B \vec{e}_y \\
 &= -v_0 B \int_N^M \vec{e}_y \cdot d\vec{l} \quad , \quad d\vec{l} = dy \vec{e}_y \\
 &= -v_0 B (y_M - y_N) \\
 &= v_0 B L
 \end{aligned}$$

**4.b)** Par la méthode de variation du flux de  $\vec{B}$

Dans ce cas, le module  $e_{ind}$  est donné par

$$e_{ind} = -\frac{d\Phi_s}{dt}$$

on a:

$$\begin{aligned}
 d\Phi_s &= \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \vec{e}_z \cdot d\vec{S} \\
 d\vec{S} &= L \vec{e}_y \wedge dx \vec{e}_x = L \vec{e}_y \wedge dt (v_0 \vec{e}_x) \\
 &= -\vec{e}_z L v_0 dt: \quad \text{orientation de S comme dans fig} \\
 d\Phi &= -BL v_0 dt \\
 e_{ind} &= -\frac{d\Phi}{dt} \\
 &= v_0 B L
 \end{aligned}$$

**5)** La vitesse du barreau (facultatif)

Cette vitesse est déterminée en résolvant la loi fondamentale de la dynamique

$$\sum_{\text{forces}} \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Il y'a 3 types de forces qui s'exercent sur le barreau:

i) la force de Laplace

$$\vec{F}_L = i_{ind} d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

mais puisque le circuit est ouvert

$$i_{ind} = 0$$

cette force est nulle

$$\vec{F}_L = \vec{0}$$

ii) Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et la réaction  $\vec{R}$   
 mais en absence de frottement on a aussi

$$m \vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{forces} \vec{F} = \vec{0} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{0} &= m \frac{dv}{dt} \vec{e}_x \end{aligned}$$

La vitesse de déplacement du barreau est donc *constante*  $\vec{v} = \vec{v}_0$ ; le mouvement est alors rectiligne et uniforme.

### B- Circuit fermé

**1)** La f.e.m  $e(t)$ : elle est donnée par la variation du flux coupé à travers le circuit

$$e_{ind} = -\frac{d\Phi_c}{dt}$$

avec

$$d\Phi_c = \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad \vec{B} = B \vec{e}_z$$

et, en choisissons un sens de circulation positif sur le circuit tel qu'il est indiqué sur la figure,

$$\begin{aligned} \vec{dS} &= -dx \vec{e}_x \wedge L \vec{e}_y \\ &= -v(t) dt \vec{e}_x \wedge L \vec{e}_y \\ &= -Lv(t) dt \vec{e}_z \end{aligned}$$

soit

$$d\Phi_c = -LBv(t) dt \tag{1.1}$$

### Résultat

$$e_{ind} = -\frac{d\Phi_c}{dt} = B Lv(t)$$

**2)** Le courant  $i_{ind}$  traversant le circuit: Il est donné par

$$\begin{aligned} i_{ind} &= \frac{e_{ind}}{R}, \quad \text{sens: MKNM} \\ i_{ind} &= \frac{B Lv(t)}{R} > 0 \end{aligned}$$

Il a donc le même sens que le sens positif choisi.

**3)** Le sens de  $i_{ind}$  est conforme avec la loi de Lenz

Le courant induit  $i_{ind}$  va créer un champ d'induction  $\vec{b}$  dans le sens contraire à  $\vec{B}$  pour s'opposer à l'augmentation de son flux qui lui a donné naissance; en accord avec la loi de Lenz

$$\begin{aligned} \vec{b} &\sim I \vec{dl} \wedge \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} \\ \vec{b} &\sim -i_{ind} dx \vec{e}_x \wedge \frac{\vec{e}_y}{|\vec{PM}|^2}, \quad \vec{e}_y = \frac{\vec{PM}}{PM} \\ &\sim -i_{ind} dx \vec{e}_z, \quad \text{sens opposé à } \vec{B} \end{aligned}$$

**4.a)** La force de Laplace  $\vec{F}$  qui s'exerce sur le barreau

Elle est donnée par la résultante des  $d\vec{F}_L$  :

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \oint_C d\vec{F}_L = \left( \int_M^K + \int_K^N + \int_N^M \right) I \vec{dl} \wedge \vec{B} \\ &= \int_M^K + \int_K^N + \underbrace{\int_N^M}_{\vec{F}_L|_{\text{barreau MN}}} I \vec{dl} \wedge \vec{B}\end{aligned}$$

$$d\vec{F}_L = I \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{F}_L|_{\text{barreau}} &= \int_N^M I \vec{dl} \wedge \vec{B} \quad , \quad \vec{B} = B \vec{e}_z \\ &= \int_{y_N}^{y_M} I \vec{dl} \wedge B \vec{e}_z \\ &= \int_L^0 i_{ind} dy \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z \quad , \\ &= i_{ind} B \int_L^0 dy \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z \\ &= \vec{e}_x i_{ind} B \int_L^0 dy \\ &= -i_{ind} B L \vec{e}_x\end{aligned}$$

comme

$$i_{ind} = \frac{B L v(t)}{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_L = -\frac{B^2 L^2 v(t)}{R} \vec{e}_x$$

**4.b)** Action de  $\vec{F}$

Elle s'oppose au mouvement du barreau (Loi de Lenz).

**5.a)**  $\vec{v}(t)$  en fonction du temps de réponse du circuit  $\tau = \frac{mR}{L^2 B^2}$

On part de la Loi fondamentale de la dynamique

$$\begin{aligned}\vec{F}_L = m \frac{d\vec{v}}{dt} &\quad \Rightarrow \quad -\frac{B^2 L^2 v(t)}{R} \vec{e}_x = m \frac{dv}{dt} \vec{e}_x \\ m \frac{dv}{dt} &= -\frac{B^2 L^2 v(t)}{R} \\ \frac{dv}{v(t)} &= -\frac{B^2 L^2}{mR} dt \quad \equiv \quad -\frac{dt}{\tau}\end{aligned}$$

avec

$$\tau = \frac{mR}{B^2 L^2}, \text{ temps de réponse du circuit}$$

Par integration

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**5.b)** Expression de  $i_{ind}$ ,

$$\begin{aligned}i_{ind} &= \frac{B L v(t)}{R} \\ &= \frac{B L v_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= i_{ind0} e^{-\frac{t}{\tau}}\end{aligned}$$



avec

$$i_{ind0} = \frac{B L v_0}{R}$$

6) Travail  $dW$  reçu par le barreau entre les instant  $t$  et  $t + dt$ :

une quantité positive

**6.a) méthode 1:**

$$dW = -\vec{F}_L \cdot \vec{dl}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= -\frac{B^2 L^2 v(t)}{R} \vec{e}_x \\ \vec{dl} &= \vec{v} dt \end{aligned}$$

remplaçons

$$\begin{aligned} dW &= -\vec{F}_L \cdot \vec{dl} \\ &= -\vec{F}_L \cdot \vec{v} dt \\ &= \frac{B^2 L^2 v(t)}{R} \vec{e}_x \cdot \vec{v} dt \\ &= \frac{B^2 L^2 v^2(t)}{R} dt, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{v} = v(t) \end{aligned}$$

**6.b) Méthode 2: par le Théorème de Maxwell**

$$dW = I \times d\Phi = (-i_{ind}) \times d\Phi$$

avec (voir eqs 1.1)

$$\begin{aligned} d\Phi &= -Bv(t) L dt \\ i_{ind} &= \frac{B L v(t)}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dW &= -i_{ind} d\Phi \\ &= \frac{Bv(t)L}{R} \cdot Bv(t) L dt \quad \text{travail fourni par } \vec{B} \text{ au barreau.} \\ &= \frac{B^2 L^2 v(t)}{R} dt > 0 \end{aligned}$$

## Exercice II

**1.a) figure d'illustration:**

$$S = [ABCD] \in \text{plan } (O, \vec{u}, \vec{e}_z) \text{ de } R_s$$

la normale à la surface est dirigée dans la direction  $\vec{v} = \vec{e}_\theta$ . Noter qu'on a 2 référentiels

$$\begin{aligned} R_0 &= (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \text{ fixe,} \quad R_s = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z) \text{ mobile} \\ \vec{\omega}_{R_s/R_0} &= \omega \vec{e}_z \end{aligned}$$

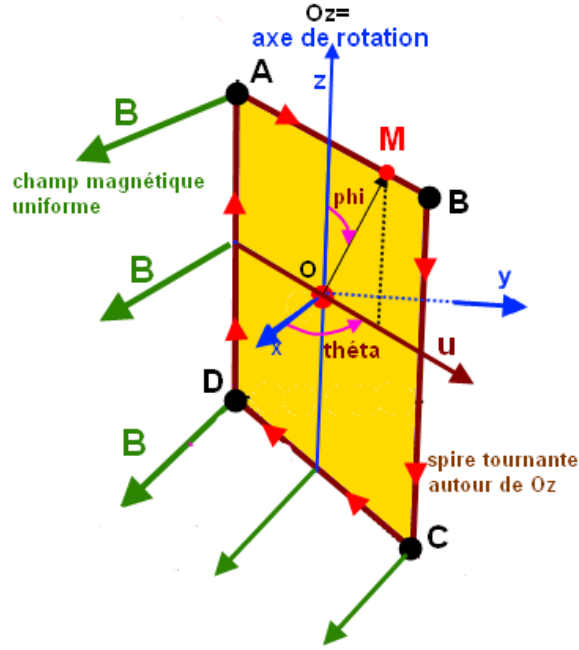


Figure 2: Spire ABCD de centre O tournante dans un champ  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ . L'axe de rotation est  $\vec{Oz}$ .

**1.b)** La spire  $S$  est placée dans un champ magnétique *uniforme*  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ ; comme le cadre tourne, le flux  $\Phi$  de  $B$  à travers la surface du cadre varie:

$$\begin{aligned} d\Phi(t) &= \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= BdS \vec{e}_x \cdot \vec{v} \\ &= -BdS \sin \omega t \end{aligned}$$

**2.a)** coordonnées des points  $M$  de  $S$ . on a:

$$\vec{OM} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

repéré par

$$r = |\vec{r}|, \quad \theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{e}_z}), \quad \phi = (\widehat{\vec{e}_z, \vec{r}})$$

avec

$$\begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \phi \end{aligned}$$

Ce sont les coordonnées sphériques.

La spire tourne par rapport à  $\Delta = \vec{OZ}$  de  $R_0$ ; et comme le cadre est *indéformable*, seule  $\theta$  qui varie

$$\theta = \omega t$$

et

$$\begin{aligned} r = cst & \implies \dot{r} = 0 \\ \phi = cst & \implies \dot{\phi} = 0 \end{aligned}$$

**2.b)** vitesse  $\vec{v}(M/R_0)$  en fonction des coordonnées  $(x, y, z)$  et  $\omega$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \sin \phi \cos \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \end{pmatrix}_{R_0} & \implies \vec{v}(M/R_0) = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \phi \sin \theta \\ r\omega \sin \phi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \\ \vec{v}(M/R_0) & = -\omega y \vec{e}_x + \omega x \vec{e}_y \end{aligned}$$

**3)** L'origine du mouvement des charges libres  $q$  du cadre  $S$  est la *force magnétique*

$$\vec{F}_m = q \vec{E}_m$$

avec  $\vec{E}_m$  le champ électromoteur.

**4)** Expression de  $\vec{E}_m$  en fonction de  $w$ ,  $B$  et les coordonnées de  $M$ ,

$$\begin{aligned} \vec{E}_m & = \frac{\vec{F}_m}{q} \\ & = \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{q} = \vec{v} \wedge \vec{B} \\ & = (-\omega y \vec{e}_x + \omega x \vec{e}_y) \wedge B_0 \vec{e}_z \end{aligned}$$

donc

$$\vec{E}_m = -\omega x B_0 \vec{e}_z$$

**5)** La f.e.m instantanée induite  $e(t)$  dans la spire est:

$$\begin{aligned} e(t) & = \int_{ABCD} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} \\ & = \int_{AB} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} + \int_{BC} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} + \int_{CD} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} + \int_{DA} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} \end{aligned}$$

soit en remplaçant

$$\begin{aligned} \vec{E}_m = -\omega x B_0 \vec{e}_z & \implies \int_{AB} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \int_{CD} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = 0 \\ e(t) & = \int_{BC} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} + \int_{DA} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} \\ e(t) & = \int_a^{-a} (-\omega x B_0)_{x=x_{BC}} dz + \int_{-a}^a (-\omega x B_0) dz \\ & = 2a\omega B_0 x_{BC} - 2a\omega B_0 x_{DA} \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned} x_{BC} & = a \cos \theta = a \cos \omega t \\ x_{DA} & = -a \cos \theta = -a \cos \omega t \end{aligned}$$

il en découle

$$e(t) = 4a^2 \omega B_0 \cos \omega t$$

6) Expression de la f.e.m par la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

avec

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_0 \int_S \vec{e}_x \cdot d\vec{s} \\ &= B_0 \vec{e}_x \cdot \vec{S}\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}\vec{S} &= -4a^2 \vec{u} \wedge \vec{e}_z \\ &= -4a^2 (\vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_y \sin \theta) \wedge \vec{e}_z \\ &= -4a^2 (-\vec{e}_y \cos \theta + \vec{e}_x \sin \theta)\end{aligned}$$

et par suite

$$\Phi = B_0 \vec{e}_x \cdot \vec{S} = -4a^2 B_0 \sin \omega t$$

et

$$\begin{aligned}e &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= 4a^2 \omega B_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

## 1.1 Exercice III: *Intéraction sélénoïde-bobine*

1) schéma d'illustration: voir fig 3

a) commentaire

- $\mathbb{S}$  : un sélénoïde *semi-infini* d'axe  $\vec{Oz}$  (avec  $z_P \leq 0$ )  
densité de spires au point  $z_P$  suivant  $z$

$$n = \frac{d\mathcal{N}}{dz_P} \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{N} = ndz_P$$

- $\mathbb{B}$  : une bobine d'axe  $\vec{Oz}$  ayant  $N$  spires
- Rappel:  
champ  $\tilde{\beta}$  créée par une spire de rayon  $a$  en  $M$  de son axe est:

$$\tilde{\beta} = \beta \vec{e}_z, \quad \beta = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha$$

avec

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}, \quad \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{pmatrix}$$

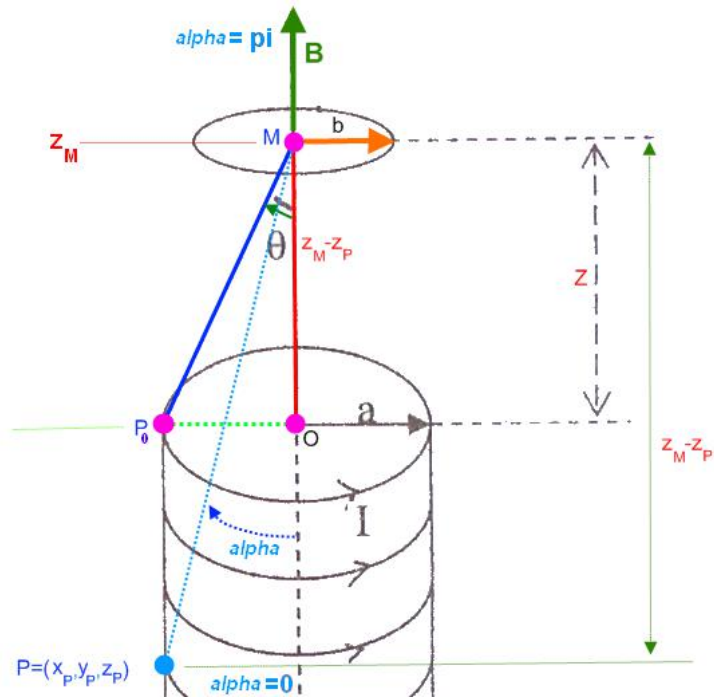


Figure 3: interaction magnétique entre un solénoïde et une bobine

## b) Remarques

- *qd*  $z_P \rightarrow -\infty$ , nous avons les limites suivantes

$$z = z_M - z_P \rightarrow +\infty \implies \sin \alpha \rightarrow 0^+ \implies \alpha \rightarrow 0^+$$

$$z = z_M - z_P \rightarrow 0 \implies \sin \alpha \rightarrow 1 \implies \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

d'où

$$-\infty \leq z_P \leq 0 \iff 0 \leq \alpha \leq \theta$$

- pour  $z_M$  fixé, on a:

$$\tan \alpha = \frac{a}{z_M - z_P}$$

$$z_M - z_P = a \cot \alpha$$

$$dz_P = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \quad , \quad \text{ici seule } z_P \text{ qui varie}$$

**2)** Expression du champ  $\vec{B}$  créé par  $\mathbb{S}$  en un point de son axe:

$$\vec{B} = B\vec{e}_z, \quad B = \int_{P \in \text{Solénoïde}} dB$$

avec

$$dB = \beta d\mathcal{N} = n\beta dz_P$$

## Remarque

$$\begin{aligned} 1 \text{ spire crée} & : \beta = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha \\ d\mathcal{N} \text{ spires créent} & : dB = \beta d\mathcal{N} = n\beta dz_P \end{aligned}$$

remplaçons

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 n I}{2a} \sin^3 \alpha dz_P = \frac{\mu_0 n I}{2a} \sin^3 \alpha \times \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 n I}{2} \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} (-\cos \alpha)_0^\theta \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

## Résultat

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 n I}{2} (1 - \cos \theta) \vec{e}_z \\ &\equiv B \vec{e}_z \end{aligned}$$

3) flux de  $\vec{B}$  cr e e par  $\mathbb{S}$  à travers une spire de la bobine  $\mathbb{B}$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\text{spire}} B \vec{e}_z \cdot d\vec{S} \\ &= B \int_{\text{spire}} \vec{e}_z \cdot d\vec{S} \quad , \quad \vec{B} \text{ suppos e constant au voisinage de } \vec{Oz} \\ &= BS \end{aligned}$$

## Résultat

$$\begin{aligned} \text{a) : } \Phi_s &= B\pi b^2 = \pi b^2 \frac{\mu_0 n I}{2} (1 - \cos \theta) \quad \text{une spire} \\ \text{b) : } \Phi_{N_s} &= BN\pi b^2 = N\pi b^2 \frac{\mu_0 n I}{2} (1 - \cos \theta) \quad \text{bobine } \mathbb{B} \text{ de } N \text{ spires} \end{aligned}$$

4) inductance mutuelle  $M$

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Phi}{I} \\ &= N\pi b^2 \frac{\mu_0 n}{2} (1 - \cos \theta) \\ &= M_0 (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

5) déduire  $M_0$

$$M_0 = \frac{\mu_0 n N}{2} \pi b^2$$

6.a) Déterminer la f.e.m induite en fonction de  $M_0, I, a, v$  et  $z$

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d\Phi}{dt} = -M_0 I \frac{d(1 - \cos \theta)}{dt} \\ &= M_0 I \frac{d \cos \theta}{dt} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \\ \frac{d \cos \theta}{dt} &= \left( \frac{\left(1 - \frac{z^2}{a^2 + z^2}\right)}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

et

$$z = z_M - z_P \Rightarrow \begin{cases} dz &= d(z_M - z_P) \\ &= dz_M = -v dt \\ \frac{dz}{dt} &= -v \end{cases} \Rightarrow \frac{d \cos \theta}{dt} = \frac{-a^2 v}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Résultat

$$e = \frac{a^2 M_0 I}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dz}{dt} = -\frac{a^2 M_0 I v}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**6.b)** courant induit dans la bobine

$$\begin{aligned} i &= \frac{e}{R} \\ &= \frac{-a^2 M_0 I v}{R(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

**7)** théorème de Maxwell

**7.a)** La résultante des forces magnétiques  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la bobine

$$\begin{aligned} dW &= id\Phi = F dz \\ F &= \frac{dW}{dz} = \frac{id\Phi}{dz} = \frac{id\Phi}{dt} \frac{1}{\frac{dz}{dt}} \\ &= -\frac{id\Phi}{dt} \frac{1}{v} = \frac{ie}{v} \\ &= \frac{e^2}{vR} \end{aligned}$$

d'où

$$\vec{F} = \frac{M_0^2 I^2 a^4 v}{(a^2 + z^2)^3 R} \vec{e}_z$$

**7.b)** La valeur de I pour laquelle la spire peut-elle être suspendue au dessus du solénoïde  
Cette condition est obtenue dans la limite  $z \rightarrow 0$  on a

$$\vec{F} = F \vec{e}_z = \frac{M_0^2 I^2 v}{a^2 R} \vec{e}_z$$

la résultante des forces agissant sur la bobine est

$$\vec{F} + \vec{P} = (F - mg) \vec{e}_z$$

il y a lévitation du solénoïde si la force de Laplace est supérieure au poids,

$$F > mg \implies I > \frac{a}{M_0} \sqrt{\frac{mgR}{v}}$$

**7.c)** Cette équilibre est-il stable

l'équilibre est *instable* car quand  $v \rightarrow 0$ , la force  $F \rightarrow 0$ ; et c'est le poids  $m\vec{g}$  qui prend le dessus.

**8)** Puissance  $\mathcal{P}$ , dissipée par effet joules dans  $\mathbb{B}$ , en fonction de  $F$  et  $v$

$$\begin{aligned} P &= Ri^2 = R \frac{e^2}{R^2} \\ &= \frac{e^2}{R} = Fv \end{aligned}$$

### Exercice IV

schéma d'illustration, voir fig 4

On utilise les coordonnées  $(\rho, \varphi, z)$  et la formule

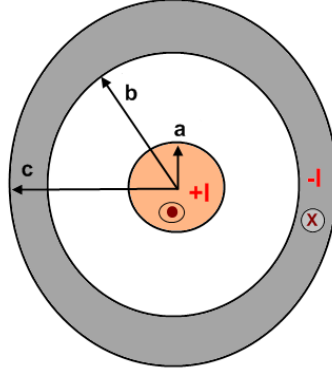


Figure 4: cable coaxial

$$\begin{aligned}
 W_m &= \iiint_{vol} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} d^3\tau \\
 &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \left( \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \rho d\rho \right) , \quad \text{dans notre cas} \\
 &= 2\pi \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \rho d\rho , \quad \Delta z = 1
 \end{aligned}$$

Selon les valeurs de  $\rho$ , on distingue 4 régions:

**a) région  $\rho < a$**

La symétrie implique  $\vec{B} = B(\rho) \vec{e}_\varphi$ ; le théorème d'Ampère conduit à:

$$2\pi\rho B = \mu_0 i \quad \text{avec } i = I \frac{\pi\rho^2}{\pi a^2} = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

soit

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho \vec{e}_\varphi$$

L'énergie magnétique  $W_{m1}$  emmagasinée par unité de longueur ( $\Delta z = 1$ ) est

$$W_{m1} = 2\pi\Delta z \int_0^a \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

**b) région  $a < \rho < b$**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

d'où

$$W_{m1} = 2\pi\Delta z \int_0^a \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$



c) région  $b < \rho < c$

dans ce cas le courant est

$$i = I \left( 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right)$$

d'où

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \vec{e}_\varphi$$

L'énergie magnétique emmagasinée par unité de longueur est alors

$$W_{m3} = 2\pi\Delta z \int_0^a \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \rho d\rho = \dots$$

d) région  $c < \rho$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 (I - I)}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi = \vec{0}$$

$$W_{m4} = 0$$

Résultat

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} + W_{m4}$$